

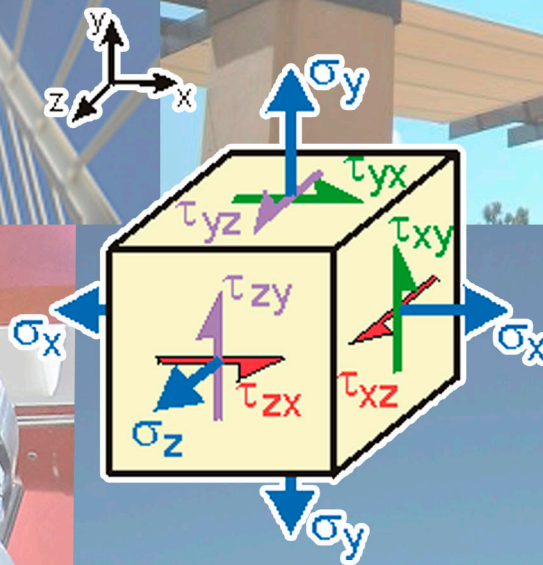


UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Parcial III

RECOPILACIÓN DE PROBLEMAS

Mecánica de Materiales II
(MC-2142)



Recopilado, resuelto y tipeado en $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$

Erasmó A. Iñíguez B.
Ing. Mecánica. 14'

Primera revisión: Mayo 2017

0.1. Problemas resueltos. Relaciones Constitutivas

La autoría y elaboración de los planteamientos de los problemas, es del Prof. Raúl Goncalves, profesor del Departamento de Mecánica de la Universidad Simón Bolívar. Estos fueron publicados en su libro.

Goncalves, R. (1999). *Introducción al Análisis de Esfuerzos* (Capítulo 3), Universidad Simón Bolívar, Caracas.

Problema 3.1. Las deformaciones generadas en un punto por un estado plano de esfuerzos vienen dadas por

$$\varepsilon_x = 9 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_y = 4 \cdot 10^{-4} \quad \gamma_{xy} = -4,5 \cdot 10^{-4}$$

Determine los esfuerzos principales sabiendo que las propiedades elásticas del material son $E=2,1 \cdot 10^6$ kgf/cm² y $\nu = 0,29$.

Solución: En el enunciado se señala que estamos en un estado plano de esfuerzos, es decir se tiene que por la relación constitutiva

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2,1 \cdot 10^6}{1+0,29} (10^{-4}) \left[\varepsilon_z + \frac{0,29}{1-0,58} (9+4+\varepsilon_z) \right]$$

Es decir, como paso previo para utilizar las relaciones constitutivas no podemos asumir que la deformación en z es nula, ya que violaría las ecuaciones constitutivas ya que un estado plano de esfuerzos no genera necesariamente un estado plano de deformaciones. Despejando la ecuación anterior se obtiene que

$$\boxed{\varepsilon_z = -5,31 \text{ kgf/cm}^2}$$

Determinamos los esfuerzos asociados considerando las relaciones constitutivas. Tenemos

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \frac{2,1 \cdot 10^6}{1+0,29} (10^{-4}) \left[9 + \frac{0,29}{1-0,58} (9+4-5,31) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_x = 2329,50 \text{ kgf/cm}^2}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \frac{2,1 \cdot 10^6}{1+0,29} (10^{-4}) \left[4 + \frac{0,29}{1-0,58} (9+4-5,31) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_y = 1515,54 \text{ kgf/cm}^2}$$

Como es dato del problema que es un estado plano de esfuerzos, podemos descartar el cálculo de $\sigma_z = 0$.

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \gamma_{xy} = \frac{2,1 \cdot 10^6}{1+0,29} (-4,5 \cdot 10^{-4}) \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = -732,56 \text{ kgf/cm}^2}$$

Así nos quedará la matriz de esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2329,50 & -732,56 & 0 \\ -732,56 & 1515,54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kgf/cm}^2$$

cuyos esfuerzos principales son los autovalores de la matriz, es decir nos queda.

$$\boxed{\sigma_1 = 0 \text{ kgf/cm}^2} \quad \boxed{\sigma_2 = 1084,5 \text{ kgf/cm}^2} \quad \boxed{\sigma_3 = 2760,54 \text{ kgf/cm}^2}$$

Problema 3.2 Para el estado de deformaciones definido por

$$\varepsilon_x = 3 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_y = -2 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon_z = -5 \cdot 10^{-4} \quad \gamma_{yz} = 3 \cdot 10^{-4} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$$

Determine:

a) Los esfuerzos principales.

b) El esfuerzo de corte máximo.

El módulo de elasticidad del material es $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{kgf/mm}^2$ y el módulo de Poisson es $\nu = 1/3$.

Solución: No tenemos ninguna condición adicional que nos permita obtener un valor indirecto de alguna deformación, por lo tanto procedemos directamente a usar las ecuaciones constitutivas.

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \frac{2,1 \cdot 10^4}{1+1/3} (10^{-4}) \left[3 + \frac{1/3}{1-2/3} (3-2-5) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_x = -1,575 \text{kgf/mm}^2}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \frac{2,1 \cdot 10^4}{1+1/3} (10^{-4}) \left[-2 + \frac{1/3}{1-2/3} (3-2-5) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_y = -9,45 \text{kgf/mm}^2}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = \frac{2,1 \cdot 10^4}{1+0,33} (10^{-4}) \left[-5 + \frac{1/3}{1-0,66} (3-2-5) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_z = -14,175 \text{kgf/mm}^2}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{1+\nu} \gamma_{yz} = \frac{2,1 \cdot 10^6}{1+1/3} (3 \cdot 10^{-4}) \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = 4,725 \text{kgf/cm}^2}$$

Así nos quedará la matriz de esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} -1,575 & 0 & 0 \\ 0 & 9,45 & 4,725 \\ 0 & 4,725 & -14,175 \end{bmatrix} \text{kgf/mm}^2$$

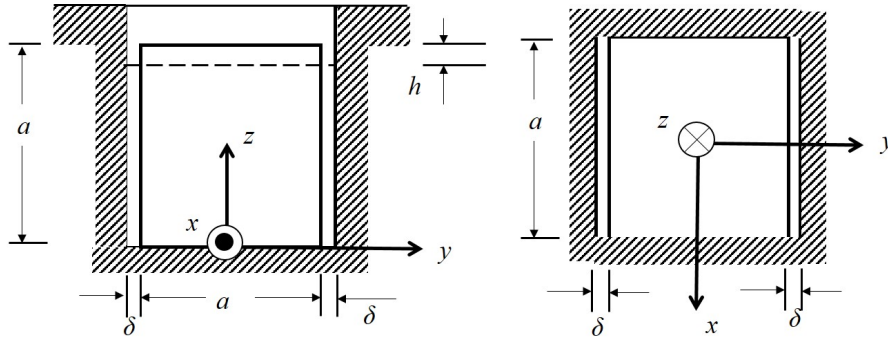
cuyos esfuerzos principales son los autovalores de la matriz, es decir nos queda.

$$\boxed{\sigma_1 = -17,10 \text{kgf/mm}^2} \quad \boxed{\sigma_2 = -6,53 \text{kgf/mm}^2} \quad \boxed{\sigma_3 = -1,58 \text{kgf/mm}^2}$$

Luego, el esfuerzo cortante máximo se obtiene con la fórmula

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{-1,58 + 17,10}{2} \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = 7,76 \text{kgf/mm}^2}$$

Problema 3.20 En la figura se muestran las vista frontal y superior de un cubo de aluminio de lado a colocado en el interior de una cavidad infinitamente rígida comparada con el aluminio. Como se observa, entre el cubo y la cavidad el ajuste es perfecto en la dirección del eje x , pero en la dirección del eje y existe una holga δ a ambos lados del cubo. Suponiendo que no existen fuerzas de fricción entre el cubo y las paredes de la cavidad, determine el desplazamiento uniforme h que debe darséle a la superficie superior del cubo para que éste se expanda lateralmente hasta que desaparezca la holga δ . Suponga que el módulo de elasticidad E y el módulo de Poisson ν son propiedades conocidas.



Solución: Analicemos las condiciones mencionadas en el enunciado.

* Si no existen fuerzas de fricción entre el cubo y las paredes, podemos suponer que todos los esfuerzos tangenciales son nulos, por consiguiente por las ecuaciones constitutivas no existen deformaciones tangenciales.

* Ya que no existe una brecha entre la cavidad y el cubo en la dirección x , en esta dirección no existe deformación ϵ_x . Sin embargo no se puede afirmar que el esfuerzo normal en esta dirección sea nulo.

* Existe una deformación en la dirección vertical z , que corresponde al cambio de longitud de la altura original del cubo, es decir

$$\epsilon_z = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \frac{a - h - a}{a} \Rightarrow \epsilon_z = -\frac{h}{a}$$

* Existe una deformación en la dirección horizontal y , que corresponde al cambio de longitud del ancho del cubo, es decir

$$\epsilon_y = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \frac{a + 2\delta - a}{a} \Rightarrow \epsilon_y = \frac{2\delta}{a}$$

Conocidas estas relaciones de deformación necesitamos determinar cuál de los esfuerzos no es útil para obtener una ecuación con una incógnita. Veamos que nos interesa conocer la distancia h al momento en que el cubo y las paredes se toquen, en este preciso momento no hay ninguna fuerza actuando en la dirección y , por lo tanto no existirá ningún esfuerzo normal σ_y , **en el momento justo cuando se tocan**. Por lo tanto tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E}{1 + \nu} \left[\epsilon_y + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right] = 0 \Rightarrow \frac{2\delta}{a} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \left(0 + \frac{2\delta}{a} - \frac{h}{a} \right) = 0 \\ \Rightarrow 2\delta - h &= -\frac{2\delta(1 - 2\nu)}{\nu} \Rightarrow h = 2\delta \left(1 + \frac{1 - 2\nu}{\nu} \right) \Rightarrow \boxed{h = \frac{2\delta(1 - \nu)}{\nu}} \end{aligned}$$

0.2. Problemas resueltos. Teorías de Falla

La autoría y elaboración de los planteamientos de los problemas, es del Prof. Raúl Goncalves, profesor del Departamento de Mecánica de la Universidad Simón Bolívar. Estos fueron publicados en su libro.

Goncalves, R. (1999). *Introducción al Análisis de Esfuerzos* (Capítulo 4), Universidad Simón Bolívar, Caracas.

Problema 4.2. El estado de esfuerzos en el punto más crítico sobre la superficie de una pieza está definido por

$$\sigma_x = 14\text{kgf/cm}^2 \quad \sigma_y = 20\text{kgf/cm}^2 \quad \tau_{xy} = -10\text{kgf/cm}^2$$

¿Qué valor debe tener el límite de fluencia para que el material no falle? Utilice la teoría de von Mises y considere que el estado de esfuerzos es plano.

Solución: Por la teoría de von Mises debemos comparar el esfuerzo cortante octaedral con el límite de fluencia con la relación

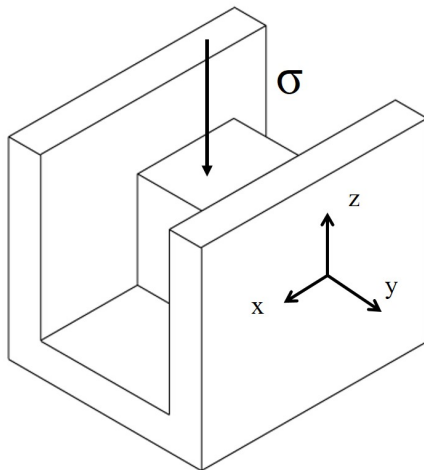
$$\tau_{oct} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} S_y \Rightarrow S_y = \frac{3\tau_{oct}}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto necesitamos calcular el esfuerzo cortante octaedral y usar el despeje anterior. Tenemos la fórmula

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \\ \Rightarrow \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \sqrt{(14 - 20)^2 + (20)^2 + (14)^2 + 6(10)^2} \Rightarrow \tau_{oct} = 11,70\text{kgf/cm}^2 \end{aligned}$$

Luego

$$S_y = \frac{3\tau_{oct}}{\sqrt{2}} = \frac{3(11,70)}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{S_y = 24,82\text{kgf/cm}^2}$$



Problema 4.7 Un cubo de 20 mm de lado, colocado dentro de un canal infinitamente rígido, se encuentra sometido a la acción de un esfuerzo normal de compresión σ uniformemente distribuido como se muestra en la figura. Si el límite de fluencia del material es de 270 MPa y el módulo de Poisson es 0.255, calcule el máximo valor que puede tomar σ para que el material no falle. Utilice la teoría de von Mises.

Solución: Primero fijamos un sistema de referencia xyz como se muestra en la figura, con esto podemos analizar las relaciones que se pueden establecer de acuerdo al enunciado:

* Debido a que no hay fuerzas normales aplicadas en la dirección x, podemos decir que el esfuerzo en esta dirección es nulo $\sigma_x = 0$.

* Como el canal es infinitamente rígido y el cubo no tiene brecha con las paredes del canal, la deformación en la dirección y tiene que ser nula, es decir $\varepsilon_y = 0$.

* Se tiene que el esfuerzo en z es $\sigma_z = -\sigma$. No se puede afirmar que el esfuerzo en la dirección y es cero, a pesar que la deformación si lo es. Esto debido a que por la relación constitutiva

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \Rightarrow 0 = \sigma_y - \nu\sigma_z \Rightarrow \sigma_y = \nu\sigma_z \Rightarrow \boxed{\sigma_y = -\nu\sigma}$$

Con esto se concluye que en la dirección y el esfuerzo no puede ser nulo. Ahora con los dos esfuerzos conocidos tenemos la matriz de esfuerzos

$$\sigma = \sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

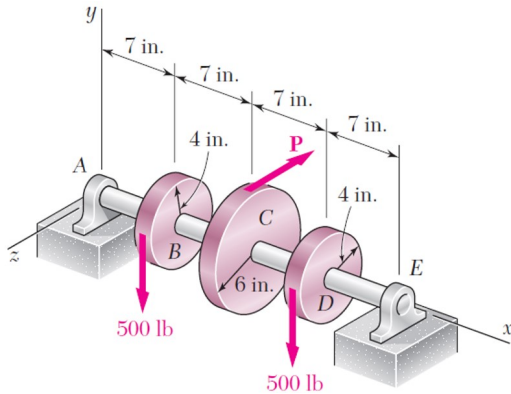
Para usar el criterio de von Misses debemos calcular el esfuerzo cortante octaedral para ello tenemos la fórmula

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \\ \Rightarrow \tau_{oct} &= \frac{\sigma}{3} \sqrt{1^2 + (\nu)^2 + (1 - \nu)^2} = \frac{\sigma}{3} \sqrt{1 + (0,255)^2 + (0,745)^2} \Rightarrow \tau_{oct} = 0,4243\sigma \end{aligned}$$

Por la teoría de falla de von Misses

$$\tau_{oct} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} S_y = \frac{\sqrt{2}}{3} 270 \Rightarrow 0,4243\sigma = \frac{\sqrt{2}(270)}{3} \Rightarrow \boxed{\sigma = 300\text{MPa}}$$

0.3. Problemas resueltos. Diseño de ejes.



Problema 8.19 (Beer). Las dos fuerzas de 500 lb son verticales y la fuerza **P** es paralela al eje z. Si $\tau_{perm} = 8\text{ksi}$, determine el diámetro mínimo permisible del eje sólido AE.

Solución: Primero calculemos los pares de torsión en los engranajes B y D, para ello multiplicamos la fuerza de 500 lb por el radio de cada uno de los engranajes, entonces

$$T_B = T_D = 500\text{lb}(4\text{in}) \Rightarrow T_B = T_D = 2000\text{lb}\cdot\text{in}$$

Estos dos torques van en el sentido positivo del eje x, ahora para determinar el torque en el engranaje C por el equilibrio estático se tiene:

$$T_B + T_C + T_D = 0 \Rightarrow T_D + 4000 = 0 \Rightarrow T_C = -4000\text{lb}\cdot\text{in}$$

Con este último resultado nos es posible calcular el valor de la fuerza P, usando la relación

$$T_C = 6P \Rightarrow P = 666,67\text{lb}$$

Ahora determinemos las reacciones en los cojinetes.

Tomamos momentos en z respecto al punto A.

$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow -500(7) - 500(21) + 28E_y = 0 \Rightarrow E_y = 500\text{lb}$$

Tomamos momentos en y respecto al punto A.

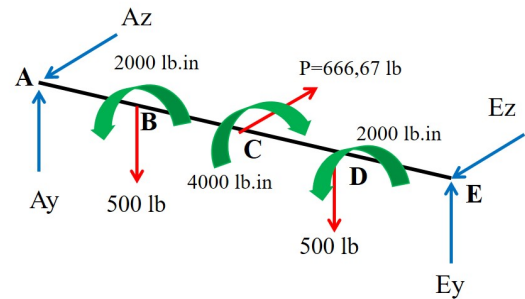
$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow 666,67(14) - 28E_z = 0 \Rightarrow E_z = 333,34\text{lb}$$

Con sumatoria de fuerzas en el eje y.

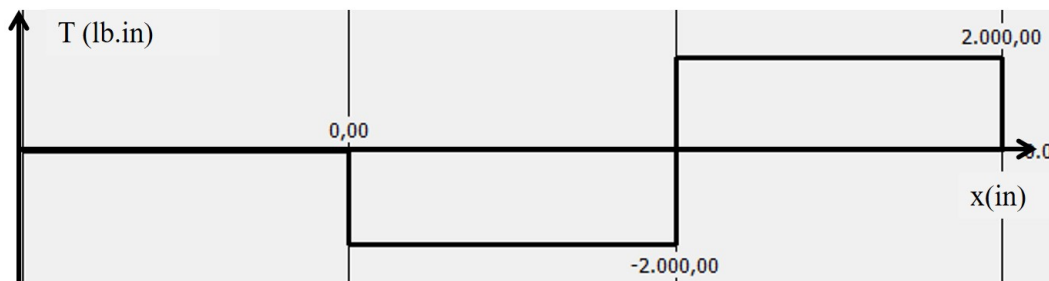
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 500 - 500 + 500 = 0 \Rightarrow A_y = 500\text{lb}$$

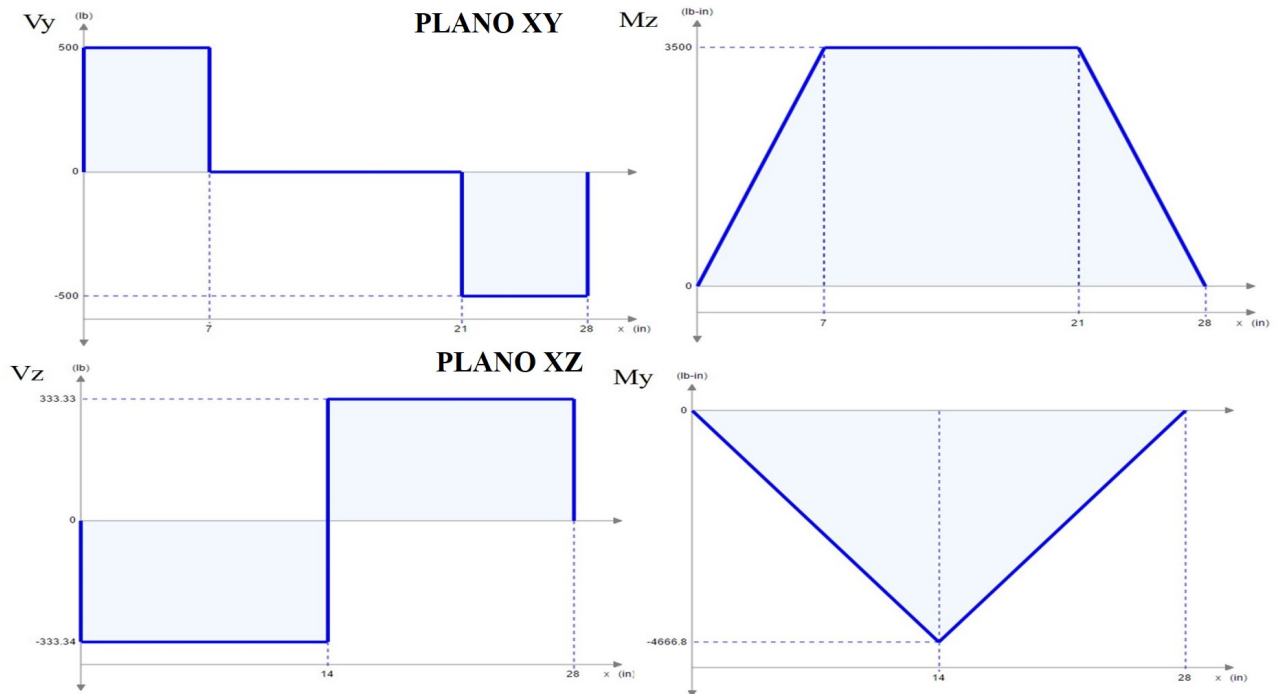
Con sumatoria de fuerzas en el eje z.

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow A_z - 666,67 + 333,34 \Rightarrow A_z = 333,33\text{lb}$$



Con las reacciones calculadas podemos proceder a realizar los diagramas de corte y momento flector en dos planos y adicionalmente el diagrama de torsión. Los ejes con cargas transversales se manipulan como si fuera una viga, ya que estas cargas producen la misma flexión que estudiamos anteriormente.





De los diagramas de momento y cortante identificamos que la sección crítica del eje está en la mitad de su longitud es decir $x = 14\text{in}$. En esta sección se encuentran aplicadas las cargas

$$T = -2000\text{lb}\cdot\text{in} \quad M_z = 3500\text{lb}\cdot\text{in} \quad M_y = -4667\text{lb}\cdot\text{in}$$

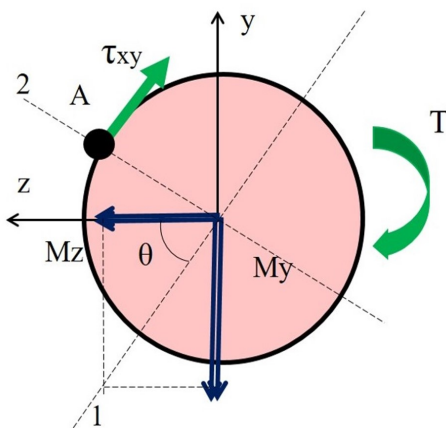
Para el cálculo de los esfuerzos busquemos las propiedades geométricas de la sección, es decir las inercias

$$J = \frac{\pi}{2}r^4 \Rightarrow J = \frac{\pi}{32}d^4$$

$$I_z = I_y = \frac{\pi}{64}d^4$$

Identificamos que tenemos flexión oblicua por lo tanto el eje neutro sufrirá una inclinación equivalente a la inclinación del momento resultante, ya que las inercias son iguales. Entonces

$$\tan \theta = \frac{I_z M_y}{I_y M_z} = \frac{-4667}{3500} \Rightarrow \theta = -53,13^\circ$$



Como punto crítico consideramos el que se encuentra en la perpendicular del eje neutro, es decir el punto A. En este punto actúan el esfuerzo normal debido al momento flector y el esfuerzo cortante debido a la torsión. Como no tenemos fuerza cortante actuando en la sección es equivalente estudiar la flexión y torsión en cualquier punto de la sección (por ser circular). Por lo tanto para evitar descomponer el esfuerzo tangencial en sus dos componentes escribiremos una matriz de esfuerzos en el sistema rotado 1-2. Es decir

tendremos los esfuerzos

1. Esfuerzo normal Conocemos la fórmula usando el momento resultante, este esfuerzo será de

compresión.

$$\sigma_x = -\frac{M_R d}{2I} = -\frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2} d}{2I} = -\frac{\sqrt{3500^2 + 4667^2} d}{2 \frac{\pi}{64} d^4} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{-186675,2}{\pi d^3}}$$

2. Esfuerzo cortante Tenemos la fórmula

$$\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} = \frac{2000d}{2 \frac{\pi}{32} d^4} \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \frac{32000}{\pi d^3}}$$

Agrupamos los esfuerzos en una matriz de esfuerzos

$$\sigma = \frac{1}{\pi d^3} \begin{bmatrix} -186675,2 & 32000 & 0 \\ 32000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

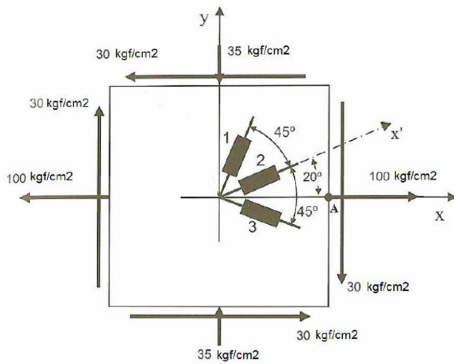
Con esfuerzos principales $\sigma_1 = -\frac{192008,30}{\pi d^3}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \frac{5333,10}{\pi d^3}$

Comparamos el esfuerzo cortante máximo con el τ_{perm}

$$\tau_{max} \leq \tau_{perm} = 8000 \Rightarrow \tau_{max} = 8000 \Rightarrow \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = 4000 \Rightarrow 98670,815 = 8000\pi d^3$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{98670,815}{8000\pi}} \Rightarrow \boxed{d = 1,578 \text{ in}}$$

0.4. Parciales resueltos. Tercer Parcial



Problema 1. (TERCER PARCIAL AJ-2012) La figura muestra el estado general de esfuerzos de un elemento de máquina construido en aluminio. Conociendo las propiedades de material ($E= 70 \text{ GPa}$, $\nu=0.33$) se pide:

- 1.1 Halle la matriz de esfuerzos del elemento.
- 1.2 Halle la matriz de deformaciones asociada.
- 1.3 ¿Cuál es el valor de la lectura de las galgas mostradas?

Solución: De la figura se reconoce que se tiene un estado plano de esfuerzos cuya matriz asociada es

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & -30 & 0 \\ -30 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kgf/cm}^2$$

Para hallar la matriz de deformaciones asociadas usaremos las relaciones constitutivas, pero primero transformemos las unidades del módulo de elasticidad

$$E = 70 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{10^4 \cdot \text{cm}^2} \cdot \frac{1 \text{ kgf}}{9,81 \text{ N}} \Rightarrow E = 713,6 \cdot 10^3 \text{ kgf/cm}^2$$

Entonces tenemos para las deformaciones

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{100}{713,6 \cdot 10^3} - \frac{0,33}{713,6 \cdot 10^3}(-35) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_x = 1,56 \cdot 10^{-4}}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{-30}{713,6 \cdot 10^3} - \frac{0,33}{713,6 \cdot 10^3}(100) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_y = -0,88 \cdot 10^{-4}}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{0}{713,6 \cdot 10^3} - \frac{0,33}{713,6 \cdot 10^3}(100 - 30) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_z = 0,32 \cdot 10^{-4}}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1 + 0,33}{713,6 \cdot 10^3}(-35) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{xy} = -0,65 \cdot 10^{-4}}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Así queda conformada la matriz de deformaciones

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1,56 & -0,65 & 0 \\ -0,65 & -0,88 & 0 \\ 0 & 0 & 0,32 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Luego, para encontrar la lectura de las galgas usamos la ecuación de transformación para la deformación en el plano, ya que las galgas tienen direcciones contenidas en el plano xy.

Tenemos

Para el eje 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta_1) + \gamma_{xy} \sin(2\theta_1) = \frac{1,56 - 0,88}{2} + \frac{1,56 + 0,88}{2} \cos(130) + (-0,65) \sin(130)$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = -0,94 \cdot 10^{-4}}$$

Para el eje 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta_2) + \gamma_{xy} \sin(2\theta_2) = \frac{1,56 - 0,88}{2} + \frac{1,56 + 0,88}{2} \cos(40) + (-0,65) \sin(40)$$

$$\varepsilon_2 = 0,86 \cdot 10^{-4}$$

Para el eje 3:

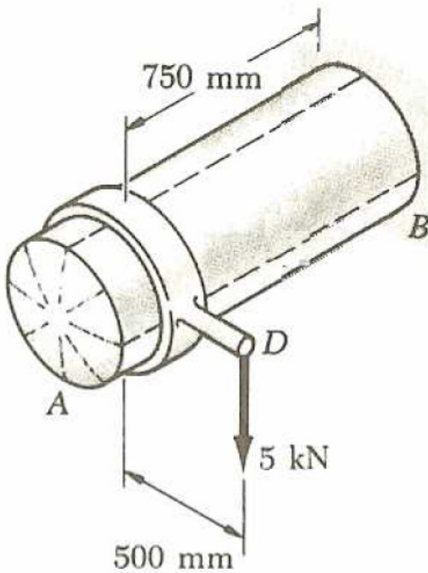
$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta_3) + \gamma_{xy} \sin(2\theta_3) = \frac{1,56 - 0,88}{2} + \frac{1,56 + 0,88}{2} \cos(-90) + (-0,65) \sin(-90)$$

$$\varepsilon_3 = 0,99 \cdot 10^{-4}$$

Problema 2. (TERCER PARCIAL AJ-2012)

El recipiente de aire comprimido AB (empotrado en la sección B) tiene un diámetro interior de 462 mm y espesor uniforme t . Si la presión manométrica interna es de 120 kPa. Se pide:

a) Calcule el espesor mínimo t de la pared del tanque si el material con el que se va a construir posee un $S_y = 200$ MPa. Utilice un Factor de seguridad de 1.3 y la teoría de falla de Von Mises.



Solución: Primero determinemos el esfuerzo admisible que será nuestro criterio para comparar

$$\sigma_{adm} = \frac{S_y}{FS} = \frac{200}{1,3} \Rightarrow \sigma_{adm} = 153,85 \text{ MPa}$$

La teoría de falla a utilizar será la de Von Mises es decir necesitamos comparar si

$$\tau_{oct} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{adm} \Rightarrow \tau_{oct} \leq 72,52 \text{ MPa}$$

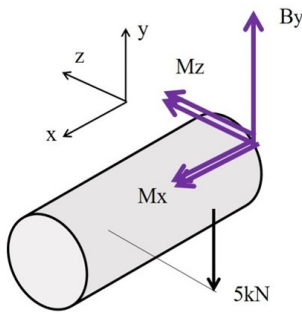
Por lo tanto para calcular este esfuerzo cortante octaedral necesitamos obtener la matriz de esfuerzos del tanque en el punto más crítico del mismo. Para ello necesitamos identificar todos los esfuerzos involucrados en la sección crítica, que en este caso resulta ser el empotramiento ya que en esta sección actuarán la fuerza puntual, un momento producido por el brazo que tiene esta fuerza y además los esfuerzos presentes por ser un recipiente de pared delgada sometido a presión interna del fluido.

Primero, comencemos buscando las reacciones en el empotramiento.

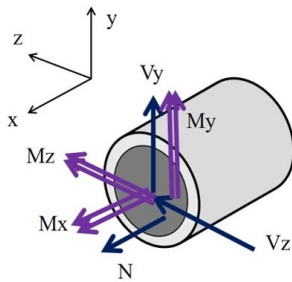
Sumamos vectorialmente los momentos tomados en el punto B

$$\Sigma \vec{M}_B = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,75 \\ y \\ -0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,75 \end{pmatrix} \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se buscan las reacciones



Hacemos un corte en el empotramiento



Y finalmente con sumatoria de fuerzas en el eje Y, se obtiene $B_y = 5\text{kN}$.

Los resultados obtenidos corresponden a las fuerzas y momentos **reactivos** en el empotramiento, pero no son las fuerzas y momentos **internos** que necesitamos para realizar el análisis de esfuerzos, por lo tanto necesitamos encontrarla mediante un corte de la sección, donde queden expuestas sus fuerzas y momentos internos (según la convención izquierda).

Para este problema no requerimos hacer los diagramas de corte y momento ya que conocemos de antemano la sección crítica, por lo tanto podemos considerar que hemos realizado este corte a una distancia del empotramiento muy pequeña (infinitesimal). Así se obtienen las cargas internas en la sección interna del empotramiento.

$$V_y = -5\text{kN} \quad M_z = -3,75\text{kN}\cdot\text{m} \quad M_x = -2,5\text{kN}\cdot\text{m}$$

Ya que se han calculado las cargas en la sección crítica se puede pasar al análisis de los esfuerzos que provocan estas fuerzas y momentos en el punto crítico de la sección.

Veamos que en la sección de aro circular existen dos posibles puntos críticos, el punto A y B, ubicados en los extremos del diámetro de la circunferencia. Analicemos los esfuerzos producidos por las cargas y la presión interna en cada uno de los puntos dibujando su respectivo cubo diferencial.

Para el punto A. Las cargas en este punto originan los esfuerzos:

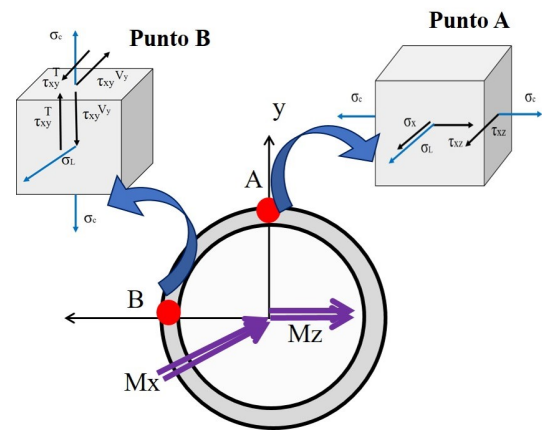
* **En la dirección x:** Se produce un esfuerzo σ_x debido al momento flector M_z , además como es un recipiente de pared delgada en esta dirección actúa el esfuerzo longitudinal σ_L .

* **En la dirección tangencial xz:** Se genera un esfuerzo debido al momento torsor aplicado en la sección. Éste esfuerzo tiene dirección del sentido de rotación.

* **En la dirección z:** Se produce un esfuerzo normal en la dirección circunferencial σ_c debido a que es un recipiente cilíndrico de pared delgada y se encuentra sometido a la presión interna. Este esfuerzo siempre debe ser colocado a tensión.

Su matriz de esfuerzos será de la forma

$$\sigma_A = \begin{bmatrix} \sigma_x + \sigma_L & 0 & -\tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\tau_{xz} & 0 & -\sigma_c \end{bmatrix}$$



Para el punto B. Las cargas en este punto originan los esfuerzos:

* **En la dirección x:** Como es un recipiente de pared delgada en esta dirección actúa el esfuerzo longitudinal σ_L . No existe esfuerzo debido al momento flector ya que en este punto estamos situado sobre el eje neutro.

* **En la dirección tangencial xy:** Se generan los esfuerzos cortantes debido a la fuerza V_y y el momento torsor, estos dos esfuerzos poseen direcciones contrarias.

* **En la dirección y:** Se genera el esfuerzo normal circunferencial debido a la presión interna.

Su matriz de esfuerzos será de la forma

$$\sigma_B = \begin{bmatrix} \sigma_L & \tau_{yz}^T - \tau_{yz}^{V_y} & 0 \\ \tau_{yz}^T - \tau_{yz}^{V_y} & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nos toca determinar cuál de ellos es el punto crítico, para ello comparemos por inspección los valores que tendríamos en las matrices de esfuerzo. Para el punto A el valor de $\sigma_x + \sigma_L$ resultaría alto así como la componente de torsión y σ_c tiene una cantidad considerable. Para el punto B no tenemos ningún esfuerzo normal debido a la flexión por lo que el término del esfuerzo en x es considerablemente menor que en A, luego el término de torsión se mantendría más o menos igual. Por lo tanto por simple inspección se determina **que en el punto A ocurren los esfuerzos con mayor magnitud.**

En el punto se deben considerar los esfuerzos

1. Esfuerzos debido a la presión interna. Se tiene la expresión para el esfuerzo circunferencial

$$\sigma_c = \frac{Pr_i}{t} \Rightarrow t = \frac{Pr_i}{\sigma_{adm}} = \frac{120\text{kPa}(231\text{mm})}{153,85 \cdot 10^3\text{kPa}} \Rightarrow t = 0,18\text{mm}$$

De la expresión para el esfuerzo circunferencial se obtiene un posible valor para el espesor de la pared del recipiente, pero como debemos calcular los otros esfuerzos debemos considerar un espesor mayor para que el elemento no falle por la suma de todos los esfuerzos, por ello consideremos un espesor de $t = 0,25\text{mm}$. Con este espesor calculamos

$$\sigma_c = \frac{Pr_i}{t} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 110,88\text{MPa}} \quad \text{además} \quad \sigma_L = \frac{\sigma_c}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma_L = 55,40\text{MPa}}$$

Con el posible valor del espesor podemos hallar el momento polar y de inercia de la sección.

$$J = \frac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{2}((231 + 0,25)^4 - (231)^4) \Rightarrow J = 19,40 \cdot 10^6\text{mm}^4$$

$$I_y = I_z = \frac{J}{2} \Rightarrow I_z = 9,70 \cdot 10^6\text{mm}^4$$

2. Esfuerzo debido al momento flector. En el punto A este esfuerzo es de tensión y puede ser obtenido mediante la fórmula

$$\sigma_x = \frac{M_z r_e}{I_z} = \frac{3,75 \cdot 10^3\text{N}\cdot\text{m}(231 + 0,25) \cdot 10^{-3}\text{m}}{9,70 \cdot 10^{-6}\text{m}^4} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = 89,4\text{MPa}}$$

3. Esfuerzo debido a la torsión. Se tiene

$$\tau_{xz} = \frac{Tr_e}{J} = \frac{2,5 \cdot 10^3\text{N}\cdot\text{m}(231 + 0,25) \cdot 10^{-3}}{19,4 \cdot 10^{-6}\text{m}^4} \Rightarrow \boxed{\tau_{xz} = 29,8\text{MPa}}$$

Con estos valores calculados se logra construir la matriz de esfuerzos en el punto A.

$$\sigma_A = \begin{bmatrix} \sigma_x + \sigma_L & 0 & -\tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\tau_{xz} & 0 & -\sigma_c \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_A = \begin{bmatrix} 144,8 & 0 & -29,8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -29,8 & 0 & -110,88 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

A esta matriz se le calculan los autovalores para encontrar los esfuerzos principales. Se obtienen

$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = 93,55\text{MPa} \quad \sigma_3 = 162,13\text{MPa}$$

Luego el esfuerzo cortante octaedral vendrá dado por

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\Rightarrow \tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(0 - 162,13)^2 + (93,55 - 0)^2 + (93,55 - 162,13)^2} \Rightarrow \tau_{oct} = 66,45\text{MPa}$$

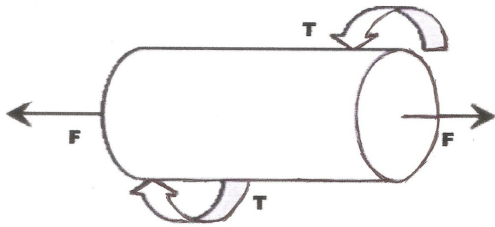
Según el criterio de falla de Von Mises

$$\tau_{oct} = 66,45\text{MPa} \leq 72,52\text{MPa}$$

Así podemos concluir que el recipiente **NO FALLA.** con $t = 0,25\text{mm}$

Problema 3. (TERCER PARCIAL) Un tanque cilíndrico a presión está sometido a un torque T , a una presión interna $p = 3,5\text{MPa}$ y una fuerza de tracción $F=30\text{ kN}$, tal como se muestra en la figura. El tanque tiene un diámetro interno de 100 mm y espesor de pared $t = 3\text{mm}$. Determine el valor máximo del par T , sabiendo que el esfuerzo admisible es de 70MPa . Utilice la teoría de Tresca.

Solución: Primero calculemos las propiedades geométricas de la sección del tanque.



$$J = \frac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{2}((50 + 3)^4 - (50)^4) \Rightarrow J = 2,58 \cdot 10^6\text{mm}^4$$

$$A = 2\pi(r_e^2 - r_i^2) = \pi((53)^2 - (50)^2) \Rightarrow A = 970,75\text{mm}^2$$

Luego para obtener la matriz de esfuerzos de un elemento del tanque podemos utilizar un cubo diferencial para encontrar los esfuerzos a los que está sometido un punto del tanque. La escogencia de este punto puede ser arbitraria ya que cualquier punto está sometido a los mismos esfuerzos (debido a la presión interna, torque y fuerza normal)

Escogiendo el punto que se muestra en la figura y considerando el sistema de referencia xyz tendremos una matriz de esfuerzos asociada de la forma

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x + \sigma_L & -\tau_{xy} & 0 \\ -\tau_{xy} & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculemos el valor de cada uno de los esfuerzos

1. Esfuerzos debido a la presión interna. Para el circunferencial

$$\sigma_c = \frac{Pr_i}{t} = \frac{3,5\text{MPa}(50)\text{mm}}{3\text{mm}} \Rightarrow \sigma_c = 58,33\text{MPa}$$

Para el longitudinal

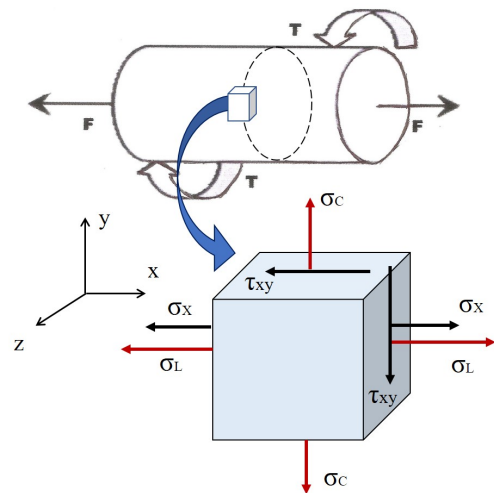
$$\sigma_L = \frac{\sigma_c}{2} \Rightarrow \sigma_L = 29,17\text{MPa}$$

2. Esfuerzo debido a la carga axial. Se tiene la fórmula

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{30 \cdot 10^3\text{N}}{970,75 \cdot 10^{-6}\text{m}^2} \Rightarrow \sigma_x = 30,92\text{MPa}$$

3. Esfuerzo debido a la torsión. Tenemos

$$\tau_{yz} = \frac{Tr_i}{J} = \frac{T(53 \cdot 10^{-3})\text{m}}{2,58 \cdot 10^{-6}\text{m}^4} \Rightarrow \tau_{yz} = 0,0205 \cdot 10^6 T$$



Por lo tanto la matriz de esfuerzos quedaría conformada por

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x + \sigma_L & -\tau_{xy} & 0 \\ -\tau_{xy} & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,09 & -0,0205T & 0 \\ -0,0205T & 58,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observemos que en la matriz de esfuerzos es imposible sacar el torque \mathbf{T} como factor común para poder obtener directamente los esfuerzos principales. Por lo tanto necesitamos recurrir a otro razonamiento para poder hallar el valor del torque. Se identifica que el estado de esfuerzos es plano, por lo tanto recurrimos a la fórmula de esfuerzo cortante máximo de las ecuaciones de esfuerzo plano. Por la teoría de Tresca el valor máximo que puede alcanzar es

$$\tau_{max} \leq \frac{\sigma_{adm}}{2} \Rightarrow \tau_{max} \leq 35\text{MPa}$$

Veamos que el esfuerzo máximo en el plano yz viene dado por

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow (35)^2 = \left(\frac{60,09 - 58,33}{2}\right)^2 + (0,0205T)^2 \Rightarrow T^2 = \frac{(35)^2 - (0,88)^2}{(0,0205)^2} \\ &\Rightarrow \boxed{T = 1706,78\text{N}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Con este valor obtenido se tiene la matriz de esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} 60,09 & -0,0205T & 0 \\ -0,0205T & 58,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} 60,09 & -35 & 0 \\ -35 & 58,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

cuyos esfuerzos principales son $\sigma_1 = 0\text{MPa}$, $\sigma_2 = 24,20\text{MPa}$, $\sigma_3 = 94,22\text{MPa}$. Así

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{94,22}{2} \Rightarrow \tau_{max} = 47,11\text{MPa} \Rightarrow \tau_{max} = 47,11\text{MPa} \geq 35\text{MPa}$$

Veamos que hemos obtenido un valor mucho mayor al esfuerzo cortante a pesar de haberlo garantizado usando la ecuación de cortante máximo. Sin embargo la teoría de Tresca exige que el esfuerzo cortante máximo **absoluto** sea menor que cierto valor, y veamos que para este estado de esfuerzos uno de los esfuerzos principales es cero, por lo tanto siempre tendremos $\sigma_1 = 0$. Si examinamos la expresión para obtener el esfuerzo cortante máximo absoluto únicamente estamos usando $\sigma_3 = \sigma_{max}$, es decir podemos plantear la siguiente ecuación que viene de las ecuaciones de estado plano.

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{1}{2}\sigma_1^* \Rightarrow 2\tau_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ 2(35) &= \frac{60,09 + 58,33}{2} + \sqrt{\left(\frac{60,09 - 58,33}{2}\right)^2 + (0,0205T)^2} \\ (70 - 59,21)^2 &= (0,88)^2 + (0,0205T)^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{(10,79)^2 - (0,88)^2}{(0,0205)^2}} \Rightarrow \boxed{T_{max} = 524,60\text{N}\cdot\text{m}} \end{aligned}$$

Con este valor obtenido se tiene la matriz de esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} 60,09 & -0,0205T & 0 \\ -0,0205T & 58,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} 60,09 & -10,75 & 0 \\ -10,75 & 58,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

cuyos esfuerzos principales son $\sigma_1 = 0\text{MPa}$, $\sigma_2 = 48,42\text{MPa}$, $\sigma_3 = 70\text{MPa}$. Así

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{70}{2} \Rightarrow \tau_{max} = 35\text{MPa} \Rightarrow \tau_{max} = 35\text{MPa} \leq 35\text{MPa}$$

Por lo tanto con este valor estamos en el valor límite aceptado según la Teoría de Tresca.

Así concluimos que

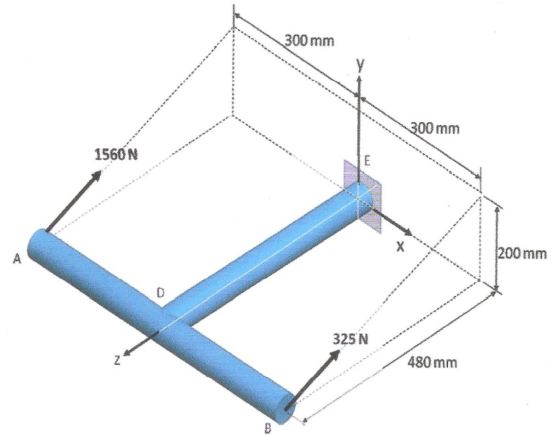
$$\Rightarrow T_{max} = 524,60\text{N}\cdot\text{m}$$

Problema 4. (TERCER PARCIAL) La figura muestra una barra **AB** que está soldada del cilindro **DE** de 50 mm de diámetro. Sobre dicha barra se aplican dos fuerzas: en el extremo **A** de 1560 N y en el extremo **B** de 325 N, en las direcciones mostradas. Se pide:

a. Determinar los esfuerzos principales en el punto **K** ubicado en el empotramiento, coordenadas **K** (25,0,0).

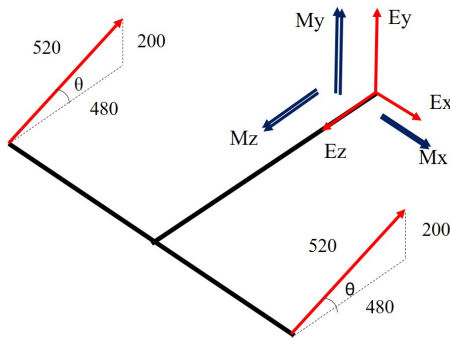
b. Empleando la teoría de Tresca y sabiendo que para el cilindro $S_y = 200\text{MPa}$ y el factor de seguridad es de 1.5, diga si el cilindro falla en el punto analizado.

Solución: Para comenzar necesitamos reducir todo el sistema de fuerzas al empotramiento para encontrar las reacciones en el mismo, tenemos por sumatoria de fuerzas



$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \frac{325}{520} \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ -480 \end{pmatrix} + \frac{1560}{520} \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ -480 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -725 \\ 1740 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Con la suma de momentos en el punto K



$$\begin{aligned} \Sigma \vec{M} = 0 \Rightarrow & \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -300 - 25 \\ 0 - 0 \\ 480 - 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \times \frac{1560}{520} \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ -480 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 300 - 25 \\ 0 - 0 \\ 480 - 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \times \frac{325}{520} \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ -480 \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 348 \\ 385,5 \\ 160,625 \end{pmatrix} \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos corresponden a las reacciones en el empotramiento, por lo tanto necesitamos ahora encontrar las fuerzas y momentos internos, las cuales serán los mismos en magnitud pero debemos respetar la convención de signos para este sistema de cargas internas.

Siguiendo la convención de signos se obtiene

$$N = -1740\text{N} \quad V_y = -725\text{N} \quad V_x = 0 \quad M_x = 348\text{N}\cdot\text{m} \quad M_y = -385,5\text{N}\cdot\text{m} \quad M_z = -160,625\text{N}\cdot\text{m}$$

En el punto de interés **K** dibujamos el estado de esfuerzos en un cubo diferencial, donde se producen los siguientes esfuerzos:

* **Esfuerzo normal en z.** Debido a la fuerza axial se tiene un esfuerzo de compresión y se suma con otro de tensión debido al momento flector en y. El momento flector M_x no produce esfuerzo en K debido a que se encuentra en $y = 0$

* **Esfuerzo cortante yz.** Debido al momento torsor y otro esfuerzo cortante debido a la fuerza cortante V_y , este esfuerzo de corte representa el máximo en la sección. Ambos van en la misma dirección.

Para calcular los mencionados esfuerzos busquemos las propiedades geométricas de la sección

$$A = \pi r^2 = \pi(25)^2 \Rightarrow A = 1963,50\text{mm}^2$$

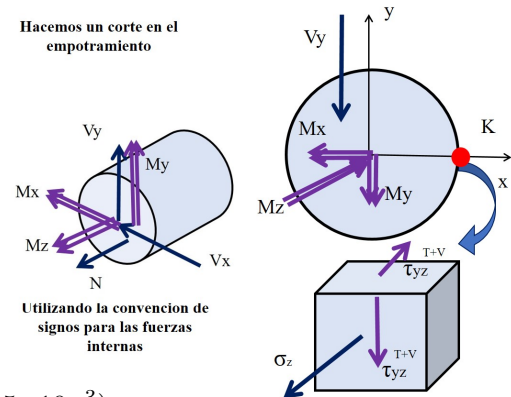
$$J = \frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\pi}{2}(25)^4 \Rightarrow J = 613,59 \cdot 10^3\text{mm}^4$$

$$I_x = I_y = \frac{J}{2} \Rightarrow I_y = 306,80 \cdot 10^3\text{mm}^4$$

Ahora, calculemos los esfuerzos

1. Esfuerzo en la dirección normal z. Este es un esfuerzo de tensión (M_y) sumado con uno de compresión

$$\sigma_z = -\frac{N}{A} + \frac{M_y r}{I_y} = -\frac{1740\text{N}}{1963,50 \cdot 10^{-6}\text{m}^2} + \frac{385,5\text{N}\cdot\text{m}(25 \cdot 10^{-3})\text{m}}{306,80 \cdot 10^{-9}\text{m}^4} \Rightarrow \sigma_z = +30,53\text{MPa}$$



2. Esfuerzo cortante xy Debido al momento torsor

$$\tau_{yz}^T = \frac{Tr}{J} = -\frac{160,625\text{N}\cdot\text{m}(25 \cdot 10^{-3})\text{m}}{613,59 \cdot 10^{-9}\text{m}^4} \Rightarrow \tau_{yz}^T = -6,55\text{MPa}$$

3. Esfuerzo cortante xy Debido a la fuerza cortante

$$\tau_{yz}^V = \frac{4V}{3A} = -\frac{4(725)\text{N}}{3(1963,50 \cdot 10^{-6}\text{m}^2)} \Rightarrow \tau_{yz}^V = -0,49\text{MPa}$$

Con estos cálculos podemos construir la matriz de esfuerzos en el punto K.

$$\sigma_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7,04 \\ 0 & -7,04 & 30,53 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

cuyos esfuerzos principales vienen dados por los autovectores de la matriz

$$\sigma_1 = -1,55\text{MPa} \quad \sigma_2 = 0\text{MPa} \quad \sigma_3 = 32,08\text{MPa}$$

Por la Teoría de Tresca necesitamos comparar si

$$\tau_{max} \leq \frac{\sigma_{adm}}{2\Psi} = \frac{200}{2(1,5)} \Rightarrow \tau_{max} \leq 66,67\text{MPa}$$

De los esfuerzos principales se calcula que

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{32,08 + 1,55}{2} \Rightarrow \tau_{max} = 16,82\text{MPa}$$

Luego como

$$\tau_{max} = 16,82\text{MPa} \leq 66,67\text{MPa}$$

Concluimos que el cilindro en el punto K, **NO FALLA.**

PROBLEMA 5. (TERCER PARCIAL AJ-2006)

- a) ¿Resiste el poste mostrado en la figura 1 las cargas aplicadas?
- b) Calcule el valor del esfuerzo normal en el punto P indicado en la figura 2.

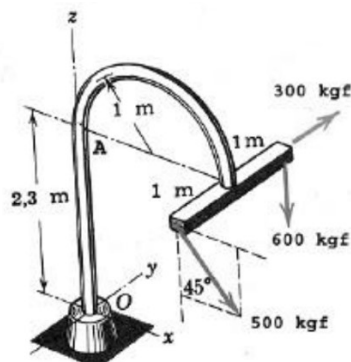


Figura 1

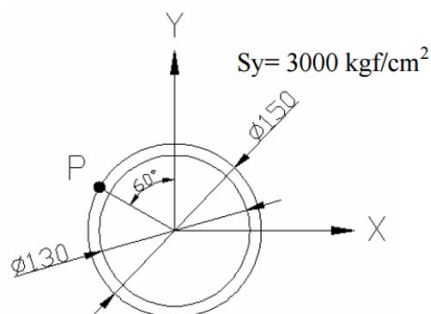


Figura 2: Corte en la sección crítica

Solución: Para el poste se tiene como sección crítica la sección del tubo en el empotramiento ya que esta sección resiste todas las fuerzas aplicadas y los momentos producidos por las mismas. Por lo tanto necesitamos encontrar las fuerzas internas que siente el tubo en el empotramiento, para ello primero traslademos todas las fuerzas al origen de coordenadas.

Con sumatoria de fuerzas.

$$\Sigma F = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -600 \end{pmatrix} + \frac{500\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_O = \begin{pmatrix} 353,55 \\ 300 \\ -953,55 \end{pmatrix} \text{ kgf}$$

Luego tomando los momentos en el origen

$$\Sigma M_O = + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -600 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2,3 \end{pmatrix} \times \frac{500\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_O = \begin{pmatrix} -936,45 \\ 2720,28 \\ 953,55 \end{pmatrix} \text{ kfg}\cdot\text{m}$$

Los resultados obtenidos corresponden a las fuerzas y momento en el origen, es decir corresponden a las fuerzas que actúan sobre la sección del material del tubo, por lo tanto podemos considerarla como las cargas internas. Esto se puede verificar obteniendo las reacciones del empotramiento y nos daremos cuenta que al usar la convención de signos obtendremos las mismas fuerzas y momentos que obtuvimos en la reducción de las fuerzas al origen.

Las cargas internas serán

$$N = -953,55\text{kgf} \quad V_x = 353,55\text{kgf} \quad V_y = 300\text{kgf}$$

$$M_x = -936,45\text{kgf}\cdot\text{m} \quad M_y = 2720,28\text{kgf}\cdot\text{m} \quad M_z = 953,55\text{kgf}\cdot\text{m}$$

Con estos datos calculados podemos proceder al análisis de los esfuerzos en la sección y escoger el punto crítico para verificar si el tubo soporta las cargas aplicadas

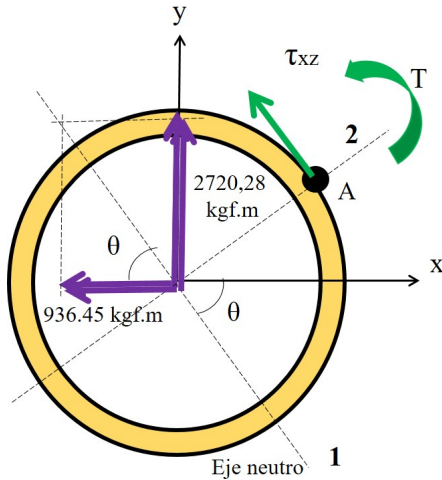
Para el cálculo de los esfuerzos busquemos las propiedades geométricas de la sección, es decir las inercias

$$J = \frac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{2}((75)^4 - (65)^4) \Rightarrow J = 21,66 \cdot 10^6 \text{mm}^4$$

$$I_x = I_y = \frac{J}{2} \Rightarrow I = 10,83 \cdot 10^6 \text{mm}^4$$

Identificamos que tenemos flexión oblicua por lo tanto el eje neutro sufrirá una inclinación equivalente a la inclinación del momento resultante, ya que las inercias son iguales. Entonces

$$\tan \theta = \frac{M_y}{M_x} = \frac{2720,28}{-936,45} \Rightarrow \theta = -71^\circ$$



Como punto crítico consideramos el que se encuentra en la perpendicular del eje neutro, es decir el punto A. En este punto actúan el esfuerzo normal debido al momento flector y la fuerza axial y el esfuerzo cortante debido a la torsión. Como los efectos de la fuerza cortante actuando en la sección son muy pequeños, éstos pueden ser despreciados ya que buscamos determinar si falla la sección. Para evitar descomponer el esfuerzo tangencial en sus dos componentes escribiremos una matriz de esfuerzos en el sistema rotado 1-2. Es decir tendremos los esfuerzos

1. Esfuerzo normal Conocemos la fórmula usando el momento resultante, este esfuerzo será de compresión, así mismo se suma el esfuerzo axial.

$$\sigma_z = -\frac{M_R r}{I} - \frac{N}{A} = -\frac{\sqrt{M_y^2 + M_x^2} r}{I} - \frac{N}{A}$$

$$\Rightarrow \sigma_z = -\frac{\sqrt{(2720,28)^2 + (936,45)^2} \cdot 10^2 \text{kgf.cm}(7,5\text{cm})}{10,83 \cdot 10^2 \text{cm}^4} - \frac{953,55 \text{kgf}}{4398,23 \cdot 10^{-2} \text{cm}^4}$$

$$\Rightarrow \sigma_z = -2014,03 \text{kgf/cm}^2$$

2. Esfuerzo cortante Tenemos la fórmula

$$\tau_{xz} = -\frac{T r}{J} = -\frac{953,55 \cdot 10^2 \text{kgf.cm}(7,5\text{cm})}{21,66 \cdot 10^2 \text{cm}^4} \Rightarrow \tau_{xy} = -330,18 \text{kgf/cm}^2$$

Agrupamos los esfuerzos en una matriz de esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -330,18 \\ 0 & 0 & 0 \\ -330,18 & 0 & -2014,03 \end{bmatrix} \text{kgf/cm}^2$$

Con esfuerzos principales $\sigma_1 = -2066,78 \text{kgf/cm}^2$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 52,75 \text{kgf/cm}^2$

Para determinar si el elemento falla usaremos la teoría de **von Mises**, para ello se necesita comparar

$$\tau_{oct} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} S_y = \frac{\sqrt{2}}{3} 3000 \Rightarrow \tau_{oct} \leq 1414,21 \text{kgf/cm}^2$$

Veamos que el esfuerzo cortante octaedral vendrá dado por

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

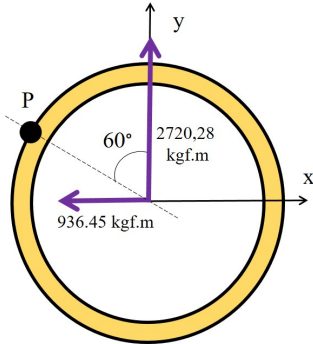
$$\Rightarrow \tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(-2066,78)^2 + (-2066,78 - 52,75)^2 + (52,75)^2} \Rightarrow \tau_{oct} = 986,96 \text{kgf/cm}^2$$

Como

$$\tau_{oct} = 986,96 \text{kgf/cm}^2 \leq 1414,21 \text{kgf/cm}^2$$

Concluimos que el poste **NO FALLA**, es decir, soporta todas las cargas aplicadas.

Ahora busquemos el esfuerzo normal en el punto P considerado. Notemos que este esfuerzo normal, es el esfuerzo que produce ambos momentos flectores y la fuerza normal. Para buscarlo primero identifiquemos las coordenadas del punto P.



$$P = 75 \begin{pmatrix} -\sin(60) \\ \cos(60) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mm} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -6,495 \\ 3,75 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mm}$$

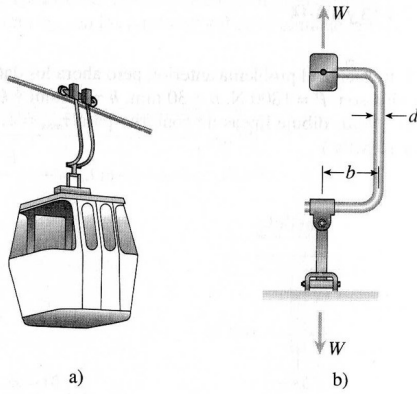
Entonces el esfuerzo normal tomando en cuenta que el momento M_x genera compresión, el momento M_y genera tensión y la fuerza axial genera compresión, nos quedará la suma

$$\sigma_P = -\frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_z} - \frac{N}{A}$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$\sigma_P = -\frac{936,45 \cdot 10^2 \text{kgf}\cdot\text{cm}(3,75)\text{cm}}{10,83 \cdot 10^2 \text{cm}^2} + \frac{2720,28 \cdot 10^2 \text{kgf}\cdot\text{cm}(6,495)\text{cm}}{10,83 \cdot 10^2 \text{cm}^2} - \frac{953,55 \text{kgf}}{4398,23 \cdot 10^{-2} \text{cm}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_P = +1285,48 \text{kgf/cm}^2}$$



Problema 6 (TERCER PARCIAL SD-2008) Una góndola de un teleférico está soportada por dos brazos doblados como se muestra en la figura. Cada brazo tiene una excentricidad $b = 20$ cm respecto a la línea de acción del peso W . El esfuerzo permisible a tensión en los brazos es 1050 Kgf/cm^2 . Si la góndola pesa 700 Kgf , cuál es el diámetro d mínimo requerido para los brazos.

Solución: Tenemos que el peso de la góndola se distribuye equitativamente en las conexiones con el teleférico y con el cable, por lo tanto el valor de la fuerza W será

$$W = \frac{700}{2} \Rightarrow W = 350 \text{kgf}$$

Ahora debemos analizar qué ocurre en la sección interna del brazo de la góndola, en ella actuará una fuerza de tensión axial y un momento flector ($M = Wb$) que generará un esfuerzo normal que se suma con el axial, por lo tanto la condición crítica es cuando estos dos esfuerzos tengan la misma dirección, es decir

$$\sigma_t = \frac{Md}{2I} + \frac{N}{A} = \frac{Wbd}{2 \frac{\pi d^4}{64}} + \frac{W}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{32Wb}{\pi d^3} + \frac{4W}{\pi d^2} \Rightarrow \sigma_{perm} = \frac{32Wb}{\pi d^3} + \frac{4W}{\pi d^2}$$

Como este corresponde a un esfuerzo de tensión lo comparamos directamente con el valor dado en el enunciado

$$\sigma_{perm} = \frac{32Wb + 4Wd}{\pi d^3} \Rightarrow \pi \sigma_{perm} d^3 = 32Wb + 4Wd$$

$$1050\pi d^3 = 32(350)(20) + 4(350)d \Rightarrow 1050\pi d^3 - 1400d - 224000 = 0$$

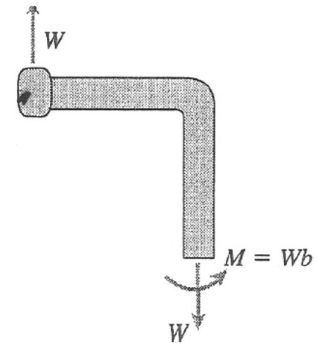
Esta corresponde a una ecuación de tercer grado que puede ser resuelta usando un método numérico o directamente en una calculadora. De la solución de esta ecuación se obtiene

$$d = 4,11 \text{cm}$$

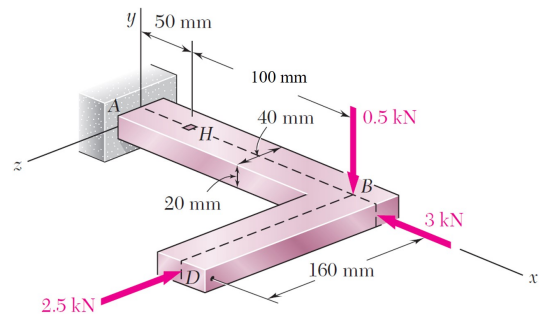
Si introducimos este valor en la ecuación de los esfuerzos nos damos cuenta que se obtiene $\sigma = 1053,40 \text{ kgf/cm}^2$. Esto se debe a que el resultado obtenido de la solución es una aproximación, por lo tanto para asegurar que nuestro diámetro cumpla con los criterios de diseño debemos escoger un número mayor. Si probamos con $d=4,25 \text{ cm}$ se obtiene el esfuerzo de $\sigma = 953,50 \text{kgf/cm}^2$, por lo tanto este diámetro cumple con los criterios de diseño. Así

$$d_{min} = 4,25 \text{cm}$$

Observación: En caso de no contar con herramientas que nos permitan solucionar rápidamente esta ecuación de tercer grado, podemos tomar como primera aproximación despreciar el esfuerzo axial y despejamos directamente d^3 y luego con el valor obtenido lo aproximamos a una cifra más alta y comparamos si nuestro esfuerzo es menor que el permisible.



Problema 7. (TERCER PARCIAL SD-2013) Se aplican tres fuerzas al elemento de máquina **ABD** como se muestra en la figura. Si se sabe que la sección transversal en todos los tramos es sólida y constante de dimensiones 20 mm x 40 mm. Se pide:



1.1 Calcular la matriz de esfuerzos en la sección en el punto más desfavorable del elemento de máquina.

1.2 Verificar, utilizando el criterio de falla de **von Mises**, si el elemento está bien diseñado y no fallará.

1.3 Hallar la matriz de deformaciones asociados al punto crítico calculado en la pregunta 1.1.

Datos: Material ($E=205 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $S_y=200 \text{ MPa}$). Factor de seguridad ($\psi = 1,3$)

Solución: Como se tiene un brazo empotrado se sabe que la sección donde se encuentra el punto más desfavorable es la sección del empotramiento, por lo tanto traslademos todas las fuerzas y reacciones al centro de la sección.

Trasladamos las fuerzas al punto sumándolas vectorialmente

$$\Sigma F = \begin{pmatrix} -3 \\ -0,5 \\ -2,5 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

Luego buscamos el momento vectorial equivalente

$$\begin{aligned} \Sigma M &= \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0 \\ 0,16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,375 \\ -0,075 \end{pmatrix} \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

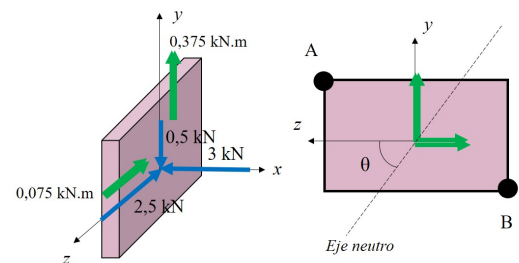
Estos resultados corresponden directamente a las cargas que sufriría la sección del empotramiento. Por lo tanto pasamos directamente a encontrar el punto crítico. Como tenemos flexión en dos planos necesitamos encontrar la orientación del eje neutro, pero para ello primero calculemos las inercias de la sección

$$I_z = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(40)(20)^3 \Rightarrow I_z = 26,67 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3 = \frac{1}{12}(20)(40)^3 \Rightarrow I_y = 106,67 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

Luego la orientación del eje neutro será

$$\tan \theta = \frac{I_z M_y}{I_y M_z} = \frac{26,67}{106,67} \frac{0,375}{-0,075} \Rightarrow \theta = -51,34^\circ$$



Al inclinar el eje neutro identificamos dos posibles candidatos para puntos críticos, el punto A y B. Veamos que para el punto A actúa un esfuerzo de compresión debido a la fuerza axial y un esfuerzo de tensión por la combinación de los momentos. Pero para el punto B tanto el esfuerzo de la fuerza axial como el producido

por la flexión tiene el mismo sentido, ambos con de compresión. Por lo tanto por la magnitud del esfuerzo en B será mayor que en A, así el punto B es el **punto crítico**.

Calculamos el esfuerzo normal en el punto B

$$\sigma_B = -\frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y} - \frac{N}{A} = -\frac{75\text{N}\cdot\text{m}(10 \cdot 10^{-3}\text{m})}{26,67 \cdot 10^{-9}\text{m}^4} - \frac{375\text{N}\cdot(20 \cdot 10^{-3}\text{m})}{106,67 \cdot 10^{-6}\text{m}^4} - \frac{3000\text{N}}{800 \cdot 10^{-9}\text{m}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_B = -97,50\text{MPa}}$$

Además el punto B resulta ser el mínimo del momento Q para el cálculo de cualquiera de los esfuerzos cortantes por lo tanto en este punto únicamente se tiene un esfuerzo normal, así queda conformada la matriz de esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} -97,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Luego busquemos el esfuerzo cortante octaedral para comparar con el criterio de falla de von Misses.

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(97,50)^2 + (97,50)^2} \Rightarrow \tau_{oct} = 45,96\text{MPa}$$

Según el criterio de falla de von Misses se debe comparar si

$$\tau_{oct} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} S_{adm} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{200}{1,3} \Rightarrow \tau_{oct} \leq 72,52\text{MPa}$$

Concluimos que como $\tau_{oct} = 45,96\text{MPa} \leq 72,52\text{MPa}$, el elemento de máquina por la teoría de falla de von Mises, **NO FALLA.**, está bien diseñado.

Ahora busquemos la matriz de deformaciones usando las relaciones constitutivas.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{-97,50}{205 \cdot 10^9} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_x = 4,76 \cdot 10^{-4}}$$

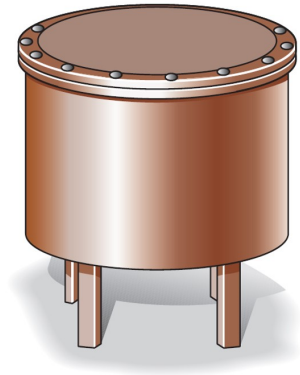
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = -\frac{0,3}{205 \cdot 10^9}(-97,50) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_y = +1,43 \cdot 10^{-4}}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0,3}{205 \cdot 10^9}(-97,50) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_z = 1,43 \cdot 10^{-4}}$$

Así se obtiene la matriz de deformaciones

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 4,76 & 0 & 0 \\ 0 & 1,43 & 0 \\ 0 & 0 & 1,43 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Problema 8. (CUARTO PARCIAL SD-2011) La tapa del tanque cilíndrico está unida por pernos al tanque, a lo largo de sus rebordes. El tanque tiene: diámetro interno de 1.5 m; espesor de pared de 18 mm; esfuerzo normal admisible de 150 MPa. Los pernos tienen: diámetro de 20 mm, esfuerzo normal admisible de 180 MPa. Se pide



2.1 La presión máxima que puede soportar el tanque sin fallar.

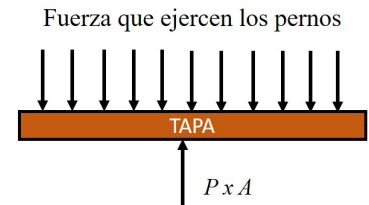
2.2 El número de pernos requerido para unir la tapa al tanque sin que fallen los pernos.

Solución: Para conseguir la presión máxima usemos el esfuerzo más grande que tiene un elemento del tanque, es decir el esfuerzo circunferencial, el cual viene dado por

$$\sigma_c = \frac{Pr_i}{t} \Rightarrow P = \frac{\sigma_{adm}t}{r_i} = \frac{150\text{MPa}(18\text{mm})}{750\text{mm}} \Rightarrow \boxed{P_{max} = 3,6\text{MPa}}$$

Como la presión del tanque ejerce una fuerza normal en la tapa, los pernos harán el trabajo de producir una fuerza tal que contrarreste la fuerza ejercida por la presión, si queremos saber cuánta fuerza necesitan hacer el conjunto de pernos, usamos la ecuación de equilibrio de fuerzas

$$PA - F = 0 \Rightarrow F = PA = (3,6)10^6\text{N/m}^2\pi(0,75)^2\text{m}^2 \\ \Rightarrow F = 6,3617 \cdot 10^6\text{N}$$



Esta fuerza es la resultante de la fuerza que ejerce cada una de los pernos, que es equivalente al esfuerzo multiplicado por el área que sufre cada perno, es decir podemos decir que

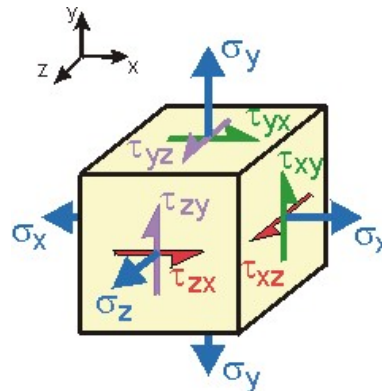
$$F = n\sigma_p A_p$$

donde n representa el número de los pernos, entonces

$$n = \frac{FA_p}{\sigma_p} = \frac{6,3617 \cdot 10^6\text{N}}{180 \cdot 10^6\text{Pa}(\pi(10 \cdot 10^{-3})^2\text{m}^2)} \Rightarrow \boxed{n = 113 \text{ pernos}}$$

Con esto finaliza el problema.

0.5. Recopilación



PROBLEMAS PROPUESTOS TERCER PARCIAL.

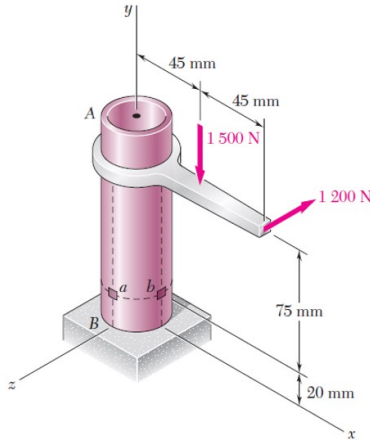
Los siguientes problemas son una recopilación tomada de las siguientes fuentes:

- [1] **Hibbeler, R. C.** Mecánica de Materiales, 8va. Ed., Prentice-Hall Hispanoamericana, 2011.
- [2] **Gere, J. M. y Timoshenko, S. P.** Mecánica de Materiales, 7ma. Ed., Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., 2009.
- [3] **Beer F.P., Johnston, E. R. y DeWolf, J. T.** Mecánica de Materiales, 5ta. Ed., McGraw-Hill Interamericana, 2009.

Nota: Puede que algunos de los enunciados hayan tenido que ser modificados con el fin de ajustar el problema a la metodología de trabajo y exigencias de este curso, sobre todo sucede en los problemas de secciones asimétricas.

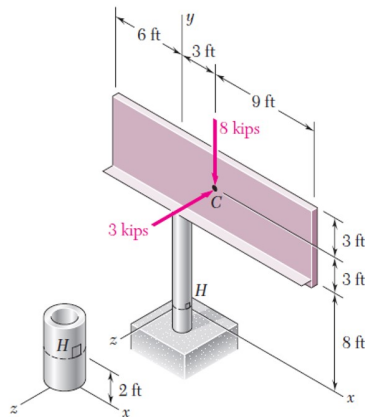
Cargas combinadas

8.40 (Beer) Se aplican dos fuerzas al tubo AB como se muestra en la figura. Si se sabe que el tubo tiene un diámetro interior de 35 mm y un diámetro exterior de 42 mm, determine los esfuerzos normal y cortante en a) el punto a, b) el punto b.



Resp: $\sigma_a = 20,4 \text{ MPa}$ $\tau_a = 14,34 \text{ MPa}$,
 $\sigma_b = -21,5 \text{ MPa}$ $\tau_b = 19,98 \text{ MPa}$

8.69 El anuncio que se muestra en la figura pesa 8 000 lb y lo sostiene un tubo estructural de 15 in. de diámetro exterior y 0.5 in. de espesor de pared. En un momento en que la presión resultante del viento es de 3 kips, localizada en el centro C del anuncio, determine los esfuerzos normal y cortante en el punto H. Determine si el elemento falla o no por la teoría de von Mises.



Resp: $\sigma = -3,96 \text{ ksi}$ $\tau = 0,938 \text{ ksi}$

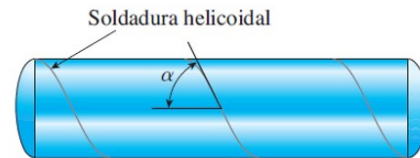
8.3.5 (Gere) Un deformímetro se coloca en la dirección longitudinal sobre la superficie de una lata de aluminio para una bebida de cola (consulte la figura). La razón entre el radio y el espesor de la lata es 200. Cuando la lata se abre, la deformación cambia en $\epsilon_0 = 170 \times 10^{-6}$. ¿Cuál es la presión interna p de la lata? (Suponga $E=10 \times 10^6 \text{ psi}$ y $\nu = 0,33$)



Resp: $p = 50 \text{ psi}$

8.3.12 Un tanque presurizado de acero está construido con una soldadura helicoidal que forma un ángulo $\alpha = 55^\circ$ con el eje longitudinal (consulte la figura). El tanque tiene radio $r = 0,6 \text{ m}$, espesor de pared $t = 18 \text{ mm}$ y presión interna $p = 2,8 \text{ MPa}$. Además el acero tiene módulo de elasticidad $E=200 \text{ GPa}$ y la relación de Poisson $\nu = 0,30$. Determine las cantidades siguientes para la parte cilíndrica del tanque.

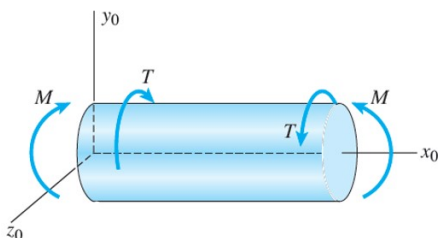
- Los esfuerzos circunferencial y longitudinal.
- Los esfuerzos cortantes máximos en el plano y fuera del plano.
- Las deformaciones circunferencial y longitudinal.
- Los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre planos paralelos y perpendiculares a la soldadura (muestre estos esfuerzos en un elemento de esfuerzo orientado de manera apropiada).



Resp: $\sigma_c = 93,3 \text{ MPa}$, $\sigma_L = 46,7 \text{ MPa}$
 $\tau_{max} = 23,3 \text{ MPa}$, $\tau_{abs} = 46,7 \text{ MPa}$,
 $\epsilon_c = 3,97 \times 10^{-4}$, $\epsilon_l = 9,33 \times 10^{-5}$

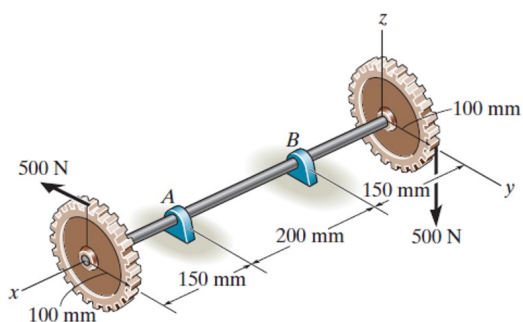
8.5.19 Un recipiente cilíndrico a presión con extremos planos está sometido a un par de torsión T y a un momento flexionante M (consulte la figura). El radio exterior es 12.0 in y el espesor de pared es 1.0 in. Las cargas son: $T = 800$ k-in, $M = 1000$ k-in y la presión interna $p = 900$ psi.

Determine el esfuerzo de tensión máximo σ_t , el esfuerzo de compresión máximo σ_c y el esfuerzo cortante máximo τ_{max} en el cilindro.



Resp: $\sigma_t = 10,480$ psi, $\tau_{max} = 5240$ psi $\sigma_c = 0$

11.55 (Hibbeler) Determine con precisión de 1 mm el diámetro del eje sólido si está sometido a la carga de los engranajes. Los cojinetes en A y B sólo ejercen componentes de fuerza sobre el eje en las direcciones y y z . Base el diseño en la teoría de falla de von Mises con $\sigma_{perm} = 150$ MPa



Resp: $d = 19$ mm

Para reportar sugerencias o errores en algunos de los problemas, se agradece notificarlo a mi correo erasmo97@gmail.com